

# Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 16 aprile 2024

Alessandro Giua — giua@unica.it

**Esercizio 1. (8 punti)** Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

(a) (4 punti) Si consideri il sistema descritto dal modello ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)} \quad (1 + \alpha)\dot{y}(t) + y(t) + \alpha = u(t) \qquad \text{(Testo B)} \quad \dot{y}(t) + \alpha t^2 y(t) = 2u(t) + (2 - \alpha)u^2(t),$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$  è un parametro incognito costante. Si discuta come variano le proprietà di linearità, stazionarietà e dinamicità in funzione dei valori assunti dal parametro  $\alpha$ , giustificando la risposta.

(b) (4 punti) Un modello ingresso-uscita è caratterizzato da un polinomio caratteristico con le seguenti radici:

$$\text{(Testo A)} \quad p_1, p_1' = -1 \pm j5, \quad p_2 = -2, \qquad \text{(Testo B)} \quad p_1, p_1' = -2 \pm j8, \quad p_2 = -1.$$

(i) Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico nel piano complesso.

(ii) Si determinino i modi che ad esse corrispondono, classificandoli e calcolandone i parametri caratteristici (costante di tempo, coefficiente di smorzamento, pulsazione naturale).

(iii) Si tracci l'andamento dei modi e si discuta a quale compete il minore tempo di assestamento.

**Esercizio 2. (10 punti)** Si consideri un sistema descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)} \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = u(t), \qquad \text{(Testo B)} \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2u(t).$$

(a) (5 punti) Si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=0} = 1, \qquad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 3.$$

(b) (5 punti) Si determini l'evoluzione forzata del sistema conseguente ad un ingresso  $u(t) = 2\delta_1(t)$ .

**Esercizio 3. (12 punti)** È data la seguente rappresentazione in termini di variabili di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(Testo A)} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{(Testo B)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad 1.5], \quad D = [0 \quad 1].$$

- (a) (1 punto) Si discuta quali siano le dimensioni dei vettori di ingresso, stato e uscita.
- (b) (4 punti) Si discuta se la matrice di stato  $A$  sia diagonalizzabile e, in tal caso, si determini una rappresentazione diagonale  $\{A', B', C', D'\}$  simile a quella data.
- (c) (4 punti) Si calcoli la matrice di transizione dello stato  $e^{At}$ .
- (d) (3 punti) Si determini la risposta libera dello stato e dell'uscita di tale sistema a partire dallo stato iniziale  $x(0) = [1 \ 2]^T$ .