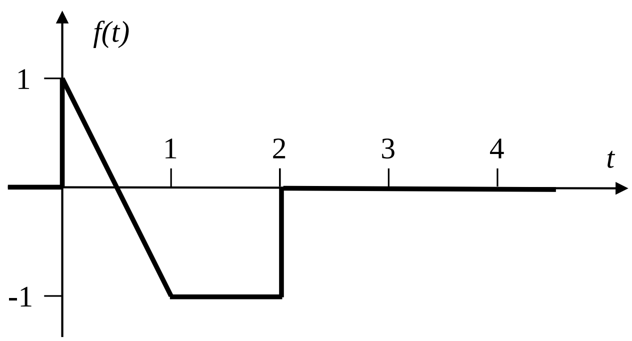
Elementi di Analisi dei Sistemi — Esercitazione 3

10 aprile 2024

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni del tempo:

$$f_a(t) = (1 + 4te^{3t})\,\delta_{-1}(t); \qquad f_b(t) = \quad 7(t^2+1)^2\,\delta_{-1}(t); \qquad f_c(t) = \quad \cos(t + \frac{\pi}{3})\,\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Trasformare secondo Laplace la seguente funzione assegnata graficamente:



Esercizio 3. Antitrasformare le seguenti funzioni di s:

$$F_a(s) = \frac{3s-2}{s^3 - 4s^2 + 20s}; \qquad F_b(s) = \frac{5s^2 - s - 3}{2s^2 + 2s - 12}.$$

Esercizio 4. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d}{dt}u(t).$$

Si determini mediante l'uso delle trasformate di Laplace l'evoluzione $y(t)$ per $t \geq 0$ a partire dalle condizioni iniziali

$$y_0 = y(t)\big|_{t=0} = 3, \qquad y_0' = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1,$$

e supponendo che il segnale $u(t)$ valga

$$u(t) = \begin{cases} 2t & t \geq 0, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si indichi il termine che corrisponde all'evoluzione libera e alla evoluzione forzata e si tracci l'andamento di tali segnali.

Esercizio 5. ***(Argomento non trattato nella I prova intermedia)*** Data la funzione

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{9s + 10}{s^2 + 5s}$$

si discuta se esista il $lim_{t\to\infty} f(t)$ e, se esiste, lo si determini applicando il teorema del valore finale. Si antitrasformi la funzione data e si verifichi il risultato ottenuto.

Funzione del tempo		Trasformata di Laplace
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Gradino unitario	$\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa lineare	$t\ \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
Polinomiale	$\frac{t^k}{k!}\ \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s^{k+1}}$
Esponenziale	$e^{at}\ \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$
Seno	$\sin(\omega t)\ \delta_{-1}(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Coseno	$\cos(\omega t)\ \delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Sinusoide smorzata	$e^{at}\sin(\omega t)\ \delta_{-1}(t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
Cosinusoide smorzata	$e^{at}\cos(\omega t)\ \delta_{-1}(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
Rampa esponenziale (o cisoide)	$\frac{t^k}{k!}e^{at}\ \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{(s-a)^{k+1}}$