

Elementi di Analisi dei Sistemi — Esercitazione 2

27 marzo 2024

Esercizio 1. Il modello della sospensione ad un grado di libertà mostrato in Figura 1 consiste in una molla con coefficiente elastico K [N/m] e in uno smorzatore con coefficiente di smorzamento b [N s/m]. Si considera come ingresso $u(t)$ la posizione della ruota sul fondo stradale e come uscita $y(t)$ la posizione della massa sospesa.

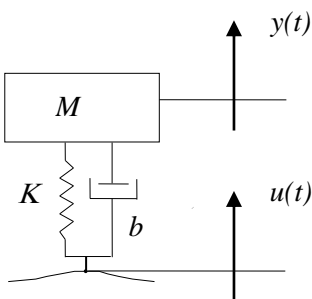


Figura 1: Modello ad un grado di libertà del quarto di automobile.

Il modello ingresso uscita di tale sistema vale:

$$M \frac{d^2}{dt^2} y(t) + b \frac{d}{dt} y(t) + K y(t) = b \frac{d}{dt} u(t) + K u(t).$$

1. Si determini il polinomio caratteristico e le sue radici in funzione di M , b e K .
2. Assunto $M = 300$ kg e $K = 12000$ N/m si supponga di dover progettare una sospensione potendo scegliere fra due smorzatori con $b_A = 900$ N s/m e $b_B = 3000$ N s/m.
Si rappresentino le radici del polinomio caratteristico che corrispondono ai due casi sul piano di Gauss e se ne valutino i parametri significativi (costante di tempo, pulsazione naturale, coefficiente di smorzamento). Come sono legati i valori di b a tali parametri?
3. Si tracci l'andamento qualitativo dei modi del sistema nei due casi. A quale sospensione compete il modo più veloce e quello più lento? A quale sospensione compete il modo più smorzato?
4. Quale di queste sospensioni scegliereste per una macchina di Formula 1 (dove l'obiettivo prioritario è quello di mantenere un assetto di guida costante) e quale scegliereste per una Land Rover (dove l'obiettivo prioritario è quello di garantire un comfort accettabile ai passeggeri anche su terreno accidentato)?
5. Scelta la sospensione con il valore b_A , si determini l'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(t)|_{t=0} = 3, \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1.$$

Esercizio 2. È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario a parametri concentrati

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1], \quad \mathbf{D} = [1 \quad 0].$$

- Si determini la dimensione dell'ingresso $\mathbf{u}(t)$, dell'uscita $\mathbf{y}(t)$ e dello stato $\mathbf{x}(t)$.
- Sarebbe ammissibile una rappresentazione in cui le matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} siano le stesse della rappresentazione data ma valga $\mathbf{D} = [1 \quad 2]^T$? Giustificare la risposta.
- Si determini il polinomio caratteristico $P(s)$ della matrice \mathbf{A} , i suoi autovalori e autovettori della matrice \mathbf{A} .
- Si discuta se esiste una trasformazione di similitudine $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t)$ che permetta di passare ad una rappresentazione in cui la matrice di stato $\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ è in forma diagonale. Tale trasformazione è unica?
- Determinata una trasformazione diagonalizzante, si calcoli la corrispondente rappresentazione.
- Si determini la matrice di transizione dello stato $e^{\mathbf{A}'t}$ della rappresentazione diagonale. Quali sono i suoi modi?
- Si determini la matrice di transizione dello stato $e^{\mathbf{A}t}$ della rappresentazione originale. Quali sono i suoi modi?
- Si determini l'evoluzione libera dello stato $\mathbf{x}_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ della rappresentazione originale a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = [2 \quad 1]^T$.
- Si determini lo stato iniziale $\mathbf{z}(0)$ della rappresentazione diagonale che corrisponde allo stato iniziale dato $\mathbf{x}(0)$ della rappresentazione originale. Si calcoli l'evoluzione libera dello stato $\mathbf{z}_\ell(t)$ e dell'uscita $y_\ell(t)$ della rappresentazione diagonale a partire da $\mathbf{z}(0)$.
- Si verifichi che mentre l'evoluzione libera dello stato delle due rappresentazioni è diversa, l'evoluzione libera dell'uscita è la stessa. Si giustifichi tale risultato.

Esercizio 3. Tracciate usando MATLAB:

- l'evoluzione libera dell'uscita determinata nel primo esercizio;
- l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita determinata nel secondo esercizio per la rappresentazione originale;
- l'evoluzione libera dello stato e dell'uscita determinata nel secondo esercizio per la rappresentazione diagonale.