Elementi di Analisi dei Sistemi

Prima Prova Scritta - 18 aprile 2023

Alessandro Giua — giua@unica.it

Esercizio 1. **(12 punti)** Si risponda in modo chiaro ed esaustivo alle seguenti domande.

1. **(4 punti)** Si discuta che cosa si intende per

   (Testo A) *sistema causale* (Testo B) *sistema dinamico*

   e si ricordi come tale proprietà possa verificarsi in base alla conoscenza di un modello ingresso-uscita e di un modello in variabili di stato.

   Si dia un esempio di un modello IU che non soddisfa tale proprietà.

2. **(4 punti)** Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\text{(Testo A)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) + \eta\, x_1(t) &= x_2(t) + \varrho\, x_2(t)\, u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + (2+\eta t)^{-1}\, x_2(t) + 2\, u_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) + (1+\varrho) u_2(t) \end{cases}$$

$$\text{(Testo B)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \eta\, x_1(t)\, x_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) - \varrho\, x_2(t) &= 3\, x_1(t) + \sqrt{2}\, u_2(t) \\ y(t) &= t^{2+\varrho} x_1(t) + (\eta+3)\, u_1(t) \end{cases}$$

   dove ϱ e η sono parametri costanti incogniti.

   (a) *(1 punto)* Qual è l'ordine di tale sistema? Si tratta di un sistema SISO o MIMO?

   (b) *(3 punti)* Per quali valori dei parametri $\varrho, \eta \in \mathbb{R}$ tale sistema è lineare, stazionario e strettamente proprio? Perché?

3. **(4 punti)** È data la seguente funzione:

   Testo A

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1-2t & \text{per } 0 \le t < 2 \\ t-2 & \text{per } 2 \le t < 3 \\ 0 & \text{per } t \ge 3 \end{cases}$$

   Testo B

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t-1 & \text{per } 0 \le t < 3 \\ 5-2t & \text{per } 3 \le t < 4 \\ 0 & \text{per } t \ge 4 \end{cases}$$

   (a) *(2 punti)* Si tracci il grafico di tale funzione.

   (b) *(2 punti)* Si determini la sua trasformata di Laplace.

Esercizio 2. (9 punti) Si consideri un sistema lineare e stazionario descritto dal seguente modello ingresso-uscita

$$\text{(Testo A)}\quad 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \dot{u}(t) + u(t),$$

$$\text{(Testo B)}\quad 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\dot{u}(t) - u(t).$$

(a) *(3 punti)* Si determini, usando la tecnica nel dominio del tempo, l'evoluzione libera a partire dalle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 3$.

(b) *(3 punti)* Si determini l'evoluzione forzata prodotta da un ingresso $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$.

(c) *(3 punti)* Si applichi il teorema del valore finale all'evoluzione forzata determinata al punto precedente.

Esercizio 3. (9 punti) È data la rappresentazione in termini di variabili di stato di un sistema lineare e stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove

$$\text{(Testo A)}\qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{(Testo B)}\qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) *(2 punti)* Si determinino autovalori e modi della matrice A e si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At}.

(b) *(3 punti)* Si determini l'evoluzione libera dello *stato* $x_\ell(t)$ e dell'*uscita* $y_\ell(t)$ di tale sistema a partire dallo stato iniziale $x(0) = [\,1\ 2\,]^T$.

(c) *(2 punti)* Si tracci l'andamento qualitativo dell'evoluzione libera dell'*uscita* $y_\ell(t)$ determinata al punto precedente. Si discuta per che valore del tempo tale segnale si possa ritenere estinto.

(d) *(2 punti)* Si discuta, motivando la risposta, se per tale sistema esistano valori dello stato iniziale che portino ad una delle seguenti evoluzioni libere:

$$\text{(Testo A)}\qquad x_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} - e^{-t} \\ 4e^{-t} \end{bmatrix} \qquad \text{oppure} \qquad y_\ell(t) = -e^{-t} + e^{-2t}.$$

$$\text{(Testo B)}\qquad x_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 4e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix} \qquad \text{oppure} \qquad y_\ell(t) = e^{-2t} - e^{-3t}.$$